I. TEORIA GENERALE

I.1. Spazio acustico o continuum sonoro

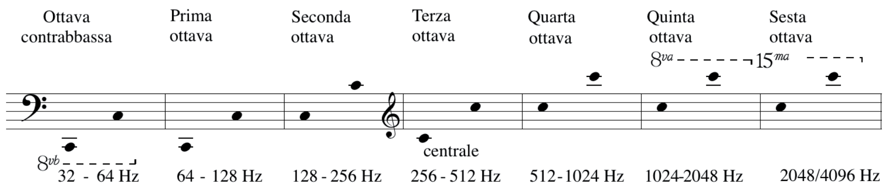
In senso generale, con il termine di *continuum sonoro* si indica l'insieme più ampio possibile di frequenze esistenti. Più in particolare, per continuum sonoro si intende la totalità delle frequenze percepibili dall'orecchio umano, ossia il totale di tutti i suoni udibili, all'interno di un ambito compreso all'incirca fra i 16 Hz e i 16.000 Herz al secondo (spazio acustico). Allo scopo di analizzare l'enorme quantità di fenomeni sonori compresi in un ambito di questo tipo, è innanzitutto necessario spazializzare il continuum, attraverso l'adozione di alcuni punti di riferimento fissi; in tale prospettiva è possibile elaborare vari metodi di divisione regolare del continuum, in base alla struttura secondo cui le varie frequenze si distribuiscono al suo interno.

Un primo punto di riferimento, particolarmente importante, è costituito dalla divisione dello spazio acustico in ottave uguali. L'ottava fu individuata sin dall'antichità come un intervallo naturale perfetto e nella sua cornice si sono inquadrati tutti i sistemi musicali. L'accettazione della ottava come prima divisione fondamentale del continuum risiede in una precisa legge fisica, dedotta empiricamente da Pitagora di Samo nel VI sec. a C., e ottenuta attraverso la divisione a metà di un monocordo. Non a caso il termine *armonia*, per gli antichi Greci, stava ad indicare sia l'ottava, in quanto simbolo che esprimeva l'ordine del mondo materiale, sia il numero, in quanto simbolo che esprimeva l'ordine del mondo spirituale.
Le valutazioni di Pitagora furono confermate da tutte le osservazioni successive. In particolare è stato più volte verificato che i suoni a distanza di ottava si succedono secondo l'intervallo matematicamente più semplice, esprimibile con i numeri interi più piccoli (1/2): il numero di vibrazioni di ogni suono a distanza di ottava aumenta cioè secondo la proporzione di 1/2. Accetteremo quindi l'evidenza di un dato scientifico, dividendo lo spazio acustico in 10 ottave, da 16 a 16.000 vibrazioni al secondo (Herz) ponendo così, all'interno di un continuum incoerente, il primo punto di riferimento.

Per convenzione il suono udibile più basso (16 Hz) sarà denominato Do; saranno tutti Do quei suoni che si succederanno secondo l'intervallo semplice di 1/2, e cioè: 16 Hz, 32 Hz, 64 Hz, 128 Hz, 256 Hz, 512 Hz, 1024 Hz, 2048 Hz, 4096 Hz, 8192 Hz e 16284 Hz. Nell'ottava cosiddetta sub-contrabbassa (16-32 Hz) non sempre l'orecchio umano è in grado di sintetizzare efficacemente le vibrazioni in una definita percezione di altezza, mentre nelle due ottave sovracute (4096-16284 Hz.), tale percezione è imprecisa, spesso

Note a p. 84

dolorosa. Solo in casi eccezionali gli strumenti costruiti dall'uomo possono raggiungere le regioni estreme dello spazio acustico: per questo motivo la quasi totalità del repertorio musicale si è sviluppato all'interno delle sette ottave centrali, che sono state denominate convenzionalmente Ottava Contrabassa (32-64 Hz), Prima Ottava (64-128 Hz), Seconda Ottava (128-256 Hz), Terza Ottava o Ottava centrale (256-512 Hz), Quarta Ottava (512-1024 Hz), Quinta Ottava (1024-2048 Hz), Sesta Ottava (2048-4096 Hz).
Da un'analisi puramente statistica del repertorio musicale occidentale, si può giungere verosimilmente alla conclusione seguente: che l'uomo si sia espresso musicalmente per il 40% circa all'interno della Terza Ottava, per il 35 % all'interno della Seconda Ottava, per il 15 % all'interno della Prima, per il 10 % all'interno della Quarta e per il 5% all'interno delle altre tre ottave, soprattutto di quella Contrabbassa e della Quinta. Inutile sottolineare che l'estensione entro cui si è manifestato il fenomeno musicale corrisponde per buona parte all'estensione della voce umana, compresa nelle quattro ottave centrali (64-1024 Hz).
Es. 1.1



Gli *spazi acustici non ottavianti*, pur non rispettando le condizioni di propagazione del suono, rimangono teoricamente possibili e sono stati oggetto di interessanti ricerche da parte di numerosi compositori; la loro costituzione interna presenta, tuttavia, forti irregolarità, tali da rendere assai problematica la loro realtà fattuale. Il compositore Ivan Vyšnegradskij[1] ad esempio, che teorizzò lo spazio non-ottaviante, lo definì come un continuum-sonoro non divisibile in altezze discrete a intervalli regolari. Uno spazio sonoro che non sia ciclico all'ottava (non ottaviante), non potrebbe quindi contenere scale cicliche, cioè scale che si potessero ripetere identiche, ad altezze assolute diverse.

I.2. Divisione dell'ottava

Il principio di identità dei suoni all'ottava è giustificato da numerose osservazioni, tanto da potere essere considerato come un assioma, necessario allo sviluppo di un qualsiasi sistema musicale. La divisione dell'ottava in 12 parti uguali è invece puramente convenzionale e tipica della civiltà musicale occidentale; questa distinzione non va sottovalutata, se non si vuole incorrere in una sorta di assolutismo culturale che non può rivelarsi che improduttivo.
La divisione dell'ottava in 12 parti uguali fu una scelta arbitraria che si rese necessaria per assecondare l'evoluzione naturale del sistema musicale occidentale. Tale suddivisio-

ne si è rivelata quanto mai ricca di possibilità e di connessioni interne, tanto da porre la civiltà occidentale in una sorta di posizione privilegiata nello stabilire una innegabile egemonia culturale in campo musicale: Curt Sachs ad esempio, sosteneva che tutta la musica dovesse procedere verso una forma di standardizzazione e che tutti i sistemi musicali dovessero evolvere verso il temperamento equabile, il quale permetteva la più vasta gamma di trasposizioni.
Il compositore e teorico Josip Šillinger[2] si è a lungo interessato dei problemi connessi alla divisione dell'ottava; in *Theory of Pitch Scales* Šillinger scrisse:

> Il numero intero 1, che esprime l'unità di misura equivalente ad un semitono, è la conseguenza del sistema di divisione dell'ottava, qui adottato. L'espressione matematica di questo sistema di temperamento (sviluppato da Andreas Werckmeister nel 1691) è $\sqrt[12]{2}$. Il numero 2 esprime il rapporto di frequenza di una ottava, cioè 2/1; l'esponente 12 esprime il numero delle divisioni uguali all'interno dell'ottava. I semitoni sono quindi numeri interi che esprimono i logaritmi su base $\sqrt[12]{2}$.
> Se costruiamo una serie di 12 radicali, in modo che l'indice della radice rimanga 12 mentre il valore del radicando passi da 1 a 12, otterremo una serie corrispondente alle frequenze del temperamento equabile attuale.[3]

I vari sistemi musicali possono avere diversi fondamenti, possono essere sorti da bisogni puramente musicali o da riflessioni matematiche e cosmologiche. In particolare il temperamento e la divisione della ottava in 12 parti uguali, nel sistema musicale occidentale, si rese necessario per dar modo alla musica tonale di manifestarsi compiutamente; esso non fu all'origine della musica tonale, bensì ne fu la conseguenza: determinato dalla pratica, solo successivamente fu codificato all'interno di una teoria grammaticale.
La tonalità si affermò come un modo di combinare i suoni così da rendere possibile la relazione di ognuno di essi con un suono fondamentale; essa risiedeva in affinità armoniche e melodiche fra i suoni, tali da determinare la loro successione e la loro aggregazione verticale. La successione dei suoni si organizzò in scale di sette suoni, la aggregazione verticale in accordi di tre suoni; la composizione e la modificazione degli accordi e le leggi della loro successione furono il risultato necessario della tonalità. Scriveva Fétis: «Cambiate l'ordine dei suoni di una scala, distribuite differentemente i suoi intervalli, e la maggioranze delle relazioni armoniche cesserà di esistere».[4]

È un'ipotesi plausibile che l'evoluzione musicale abbia proceduto da semplici formule a scale arbitrarie sempre più organizzate, per tendere verso lo spazio sonoro nella sua totalità: sarebbero state le note aggiunte, in sostanza, a determinare l'ampliamento di ogni sistema. Consideriamo per esempio un sistema musicale molto semplice, che contenga solo formule; queste formule tenderanno a proliferare in modo da formare scale sempre più complesse. Quando queste formule avranno perso la loro identità, il sistema si evolverà verso una nuova scala arbitraria, che diverrà a sua volta una formula di un sistema futuro (questo processo è uguale a quello che nella linguistica si chiama *blending*).
L'introduzione di nuove formule porterà ad un ulteriore arricchimento del sistema e alla adozione di una nuova scala arbitraria che comprenderà tutte le precedenti.

La scala diatonica, tipica della musica tonale, aveva avuto origine da alcune brevi formule ripetitive che si erano stabilizzate in un sistema di relazioni. La adozione della scala diatonica finì poi con il dare origine alla divisione dell'ottava in 12 parti uguali, attraverso quel procedimento conosciuto come *temperamento equabile*.
Nella musica occidentale moderna tutte le altezze tendono a inquadrarsi all'interno della scala cromatica a dodici suoni: questa scala si è costituita come conseguenza delle varie scale diatoniche e quest'ultime, a loro volta, sono una somma delle triadi che esse contengono. In questa prospettiva appare molto utile l'introduzione dell'idea matematica di *insieme*. Un insieme può essere descritto come un sistema arbitrario di relazioni. Sono insiemi, ad esempio, tutti i numeri, tutti i numeri interi, tutti i numeri pari, ecc.: il primo di questi termini (soprainsieme) contiene gli altri due (sottoinsiemi), mentre il secondo contiene il terzo. Lo stesso ragionamento può essere applicato a insiemi sonori come tutte le altezze, tutte le altezze temperate secondo un certo sistema di divisione, 'tutte le altezze inscritte in una scala di Do maggiore', ecc.

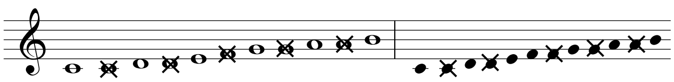
Abbiamo sottolineato come il principio di ogni tipo di espressione musicale sia la scelta di pochi suoni all'interno di una vasta gamma di possibilità; tali suoni stanno fra loro in un determinato rapporto intervallare e la loro organizzazione determina la costituzione di scale, che sono alla base di ogni sistema musicale evoluto. In questa prospettiva, uno studio accurato della scala temperata di 12 suoni appare indispensabile per meglio focalizzare la natura di tutte le combinazioni (sottoinsiemi) in essa contenute, passando in rassegna e analizzando le possibili aggregazioni che ne derivano. Non si possono tuttavia omettere tre considerazioni:
1) che sia possibile dividere ogni ottava in un numero qualsiasi di parti uguali tra loro (ad esempio in 24 parti, come nel sistema a 1/4 di tono);
2) che sia possibile dividere ogni ottava in un numero qualsiasi di parti in qualsiasi modo diverse tra loro (ad esempio nelle scale indiane);
3) che sia possibile dividere ogni ottava in un qualsiasi modo diverso dalle altre ottave, in un numero qualsiasi di parti, in qualsiasi modo diverse tra loro.
Fra le numerose divisioni dell'ottava teoricamente possibili, comprendenti un numero di intervalli maggiore di 12, Rasch[5] ne elenca ben 78, composte da un numero variabile di gradi, da 14 a 129. Fra le scale più conosciute, si segnalano brevemente le seguenti:
- 19 gradi (sistema dodecafonico-diatonico): Yasser (1932), Mandelbaum (1961);
- 24 gradi (sistema bi-dodecafonico o a quarti di tono): Haba (1927), Carrillo, Kallenbach-Greller (1926), Vyšnegradskij (1940), Schneider (1975);
- 31 gradi (sistema a quinti di tono): Vicentino (1555), Colonna (1618), Huygens (1691), Supping (1722), Fokker (1945);
- 36 gradi (sistema tri-dodecafonico o a sesti di tono): Haba (1927);
- 43 gradi (sistema a settimi di tono): Saveur (1701);
- 48 gradi (sistema a ottavi di tono):
- 53 gradi (sistema a noni di tono): Bosanquet (1876), White (1883), Tipple e Frye (1941) Fickenscher (1941);
- 72 gradi (sistema esa-dodecafonico o a dodicesimi di tono): Maedel e Herf (1977);
- 96 gradi (sistema otto-dodecafonico o a sedicesimi di tono): Carrillo (1948).

Es. 1.2

I.3. Altezze e intervalli

Si definiscono *altezze* (in inglese *pitch*) solo quei suoni le cui frequenze possono essere ottenute sommando ad una altezza standard (nel nostro caso Do = 16 Hz) un numero intero di semitoni temperati. Le altezze si rappresentano tradizionalmente attraverso le note, simboli grafici distribuiti su una griglia di riferimento, il pentagramma, ai quali è dato il nome convenzionale di ‘do’, ‘do♯’, ‘re’, ecc. La notazione per ogni altezza non è unica, poiché ne esistono diverse possibili denominazioni, (enarmoniche) dovute alle cinque inflessioni utilizzate nel sistema tonale (♭♭, ♭, ♮, ♯, ♯♯). Tutte le notazioni enarmoniche sono equivalenti, in quanto le diverse denominazioni derivano dalla varietà dei significati funzionali che un’altezza può assumere all’interno di una logica di tipo tonale; le tre possibili notazioni dell’altezza Do ad esempio (si♯, do, re♭♭) si possono ridurre ad una sola.

Numerosi sono stati i tentativi di ridurre la notazione di una altezza ad un unico simbolo grafico, che comprendesse tutte le inflessioni; tuttavia nessuno di questi tentativi ha avuto molto successo. Vanno segnalate in particolare le proposte di Busoni e di Alaleona, di Obuchov, di Golyšev e di Hauer, tutte motivate dalla necessità di uniformare i ‘diesis’ e i ‘bemolle’ in un unico simbolo, vista l’inutilità di ogni distinzione all’interno di un linguaggio non tonale.
Obuchov propose una riforma grafica nel 1915, riforma assai vicina, per certi aspetti, a quella del teorico argentino Menchaca, che stabiliva e fissava il carattere definitivo e assoluto del temperamento equabile. Hauer giungeva a conclusioni analoghe nel 1921. Anche Schönberg e Bartók ebbero a sottolineare la necessità di uniformare in un unico simbolo i ‘diesis’ e i ‘bemolle’. Nell’esempio seguente sono riportati i simboli proposti da Obuchov, utilizzati da numerosi compositori del ’900, fra cui Honegger.
Es. 1.3



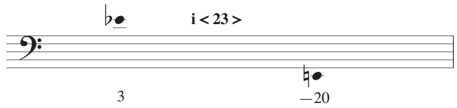
Abbiamo sottolineato come la pratica musicale abbia circoscritto l'estensione dello spazio sonoro utilizzabile in circa 7 ottave, ognuna delle quali suddivisa in 12 parti uguali, per un totale di 84 altezze. La totalità dei suoni disponibili con questo tipo di suddivisione appare chiaramente sul pianoforte, che è composto all'incirca da tanti tasti quanti sono i suoni compresi in 7 ottave divise in 12 parti (cioè 84): il totale dello spazio sonoro temperato comprende in teoria fino a 120 unità (12x10).
Per designare le varie altezze, appare quanto mai utile e conveniente ricorrere ad una notazione che faccia uso dei numeri interi. I numeri interi possiedono infatti due proprietà fondamentali:
- sono ordinati in modo che fra due di essi uno sia più grande;
- sono egualmente spaziati; quello successivo è più grande del precedente esattamente di una unità.

Queste proprietà si accordano con i principi fondamentali di ogni scala a temperamento equabile, nella quale cioè tutte le altezze si succedano a intervalli regolari, per convenzione uguali a 1. Se, ancora per convenzione, chiameremo 0 il Do centrale, le altezze inferiori saranno rappresentate da numeri interi negativi, quelle superiori da numeri interi positivi. Fra due altezze sarà più acuta quella designata da un numero intero più grande (0+1 = un semitono sopra il Do = Do♯).
Uno dei primi teorici che fece uso dei numeri interi per indicare gli intervalli fu Sergej Taneev; egli indicò l'unisono con lo 0, il semitono con 1 e così via. A questo proposito, nel suo *Contrappunto mobile nello stile rigoroso*, pubblicato per la prima volta nel 1909, Taneev ebbe a scrivere:

> […] che soltanto su una base matematica si può fondare una dottrina precisa e chiara sul contrappunto mobile… che soltanto per via matematica è possibile sollevare la cortina di arcano mistero che per tanto tempo ha avvolto la dottrina del contrappunto mobile.[6]

Adottando i principi di Taneev, un *intervallo* fra due altezze x e y può essere definito come "il numero intero di semitoni compresi fra x e y": esso può essere calcolato assumendo una altezza specifica, denominata x, e sommando un certo numero di semitoni temperati, fino ad arrivare alla altezza denominata y. Il numero di semitoni sommati sarà l'intervallo fra x e y. Per ogni due altezze x e y, l'intervallo <i> fra x e y sarà uguale alla differenza fra y e x.

Esempio:
x = mi♭ = 3, y = mi = –20.
L'intervallo fra x e y si potrà indicare così:
i <x,y> = y–x, cioè i <3–20> = –20–3 = –23.
Es. 1.4



Un intervallo può essere *consecutivo* o *simultaneo*: nel primo caso potrà essere *ascendente* (positivo) o *discendente* (negativo); per motivi pratici è opportuno classificare ogni intervallo nella sua forma ascendente, partendo dall'altezza più bassa e indicandolo con un valore assoluto positivo: nel caso precedente si avrà quindi:
3–(–20) = 23.
Gli intervalli superiori all'ottava sono denominati *intervalli composti*, gli intervalli compresi all'interno di una ottava sono denominati *intervalli semplici*. Esistono 12 tipi di intervalli semplici, che possono essere indicati coi numeri interi da 0 a 11. Essendo la denominazione tradizionale degli intervalli strettamente legata al sistema tonale, (all'esterno del quale non c'è una differenza sostanziale tra seconda eccedente e terza minore) appare in questo contesto indispensabile designare ogni intervallo con un numero che ne specifichi l'*ampiezza* (o *magnitudine*).
Nella tabella seguente appare il numero che qualifica ogni intervallo, con a fianco la sua denominazione nel sistema tonale:

intervalli semplici

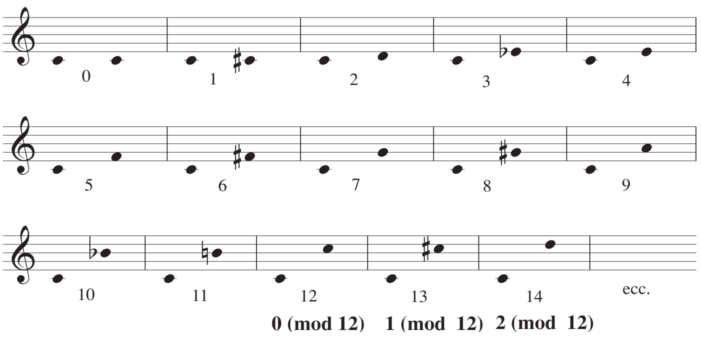
0	prima (unisono)
1	seconda minore (semitono); ottava eccedente
2	seconda maggiore (tono); terza diminuita
3	terza minore; seconda eccedente
4	terza maggiore; quarta diminuita
5	quarta giusta
6	quarta eccedente; quinta diminuita (tritono)
7	quinta giusta
8	quinta eccedente; sesta minore
9	sesta maggiore; settima diminuita
10	settima minore; sesta eccedente
11	settima maggiore; ottava diminuita

intervalli composti

0 mod 12 (12)	ottava
1 mod 12 (13)	nona minore
2 mod 12 (14)	nona maggiore

eccetera.

Es. 1.5

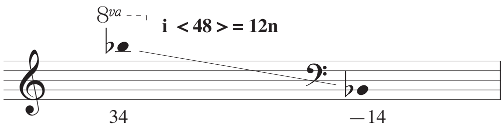


I.4. Classi di altezze

Secondo una definizione adottata da Milton Babbit nel 1955**,** tutte le altezze che differiscono per un numero intero di ottave appartengono ad una medesima *classe di altezze* (in inglese *pitch class,* abbreviato in *pc*).[7] Col termine di classe di altezze si indica quindi "l'insieme di quelle altezze che differiscono l'un l'altra solamente per l'ottava a cui appartengono". Tale nozione esclude ogni informazione inerente il registro, la durata, il timbro, la dinamica e ogni altra caratteristica secondaria di un suono: una classe di altezze è semplicemente l'insieme di tutte le altezze equivalenti a distanza di ottava.
I suoni di una stessa classe di altezze sono multipli interi a distanza di 12 semitoni; esistono perciò 12 classi di altezze, quante sono le divisioni della ottava temperata: ognuna è chiamata con il suo membro positivo più piccolo.
Due suoni x,y appartengono alla stessa classe di altezze, sono cioè equivalenti, se e solo se per un intero n, y = (12n) –c, ossia i <x,y> = 12n.

Esempio:
Per n = 4, x = 34, y = –14, si avrà:
34 = 12n –14 = 48–14, ossia i <34,–14> = –14–34 = 48.
Il membro positivo più piccolo della classe di altezze a cui appartengono –14 e 34 è 10, poiché i <–14,10> = 12n e i <34,10> = 12n.

Es. 1.6



In pratica per verificare se due altezze qualsiasi appartengano alla medesima classe di altezza occorre calcolare se l'intervallo che le divide sia multiplo di 12; questa definizione è chiamata in matematica *modulo* e, nel caso della scala cromatica (temperata in 12 parti uguali), si usa l'abbreviazione: mod 12.
L'orologio è un esempio familiare di un sistema a modulo 12: proprio riferendosi all'analogia fra orologio e scala cromatica, il compositore e teorico Peter Schat ha elaborato una teoria musicale che ha denominato *Tone Clock System*.[8]

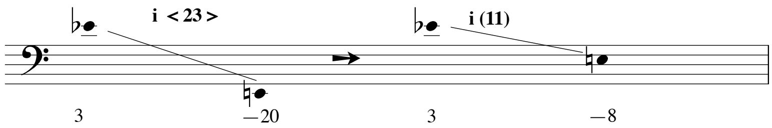
Poiché il materiale di base del sistema temperato occidentale è costituito da 12 differenti classi di altezza, esse si possono tutte rappresentare all'interno di una singola ottava, utilizzando i numeri interi da 0 a 11. Definiremo quindi *interi di classe di altezza* i numeri interi da 0 a 11. L'insieme che contiene tutte e 12 le classi di altezze all'interno di una ottava può essere definito *spazio temperato assoluto* (per Babbit: *Aggregate*; per Simbriger: *Mantelkomplexion*).[9]
La *regolarità* è l'aspetto fondamentale dello spazio temperato. La presenza ad intervalli regolari di uno stesso fenomeno permette la riduzione dello studio di tutte le combina-

zioni all'interno di un'unica ottava, poiché tutte le ottave possiedono esattamente le stesse caratteristiche. Le classi di altezza sono le entità minime di suddivisione, e si possono rappresentare attraverso il simbolo grafico delle note distribuite sul pentagramma; esse potrebbero essere ugualmente rappresentate come punti disposti lungo una linea.

I.5. Intervalli fra classi di altezze e classi di intervalli

Per ogni due classi di altezze a e b, l'intervallo fra a e b sarà uguale a b–a mod 12.

Esempio:
a = mi♭ = 3; b = mi = –20(mod 12) = –8.
L'intervallo fra a e b si potrà indicare così: i (a,b) = b–a, cioè i (3,–8) = –8–3 = –11.
Es. 1.7



Anche in questo caso, come per le altezze, sarà molto utile indicare l'intervallo come se fosse sempre ascendente, cioè con un valore assoluto positivo; nel caso precedente avremo quindi 3–(–8) = 11.
Gli intervalli fra classi di altezze sono sempre da considerarsi all'interno di una ottava (intervalli semplici). La somma dei due intervalli semplici, ascendente e discendente, dovrà sempre essere uguale a 0 mod 12, e l'uno sarà l'"inverso" dell'altro: nel caso precedente avremo –11+11 = 0.
Gli intervalli semplici si replicano periodicamente all'interno di una estensione sempre più ampia secondo la formula tn = <i>, dove t è il numero di parti uguali in cui è divisa ogni ottava, n è il numero delle ottave e <i> è il numero dei semitoni che formano l'intervallo composto (cioè non ridotto mod 12).
Si può così ottenere la tabella seguente, indicativa del numero di semitoni compresi in un numero sempre crescente di ottave:

ottave	*semitoni*
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
6	72
7	84

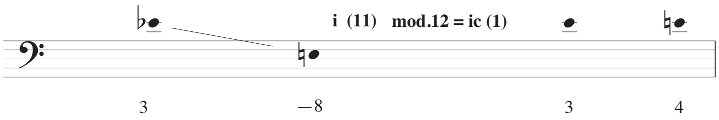
Assegnando un numero ad ogni intervallo, si possono eseguire agevolmente numerose operazioni. Ad esempio, l'estensione dello spazio sonoro temperato potrà essere dedotta dal circolo delle quinte completo (contando cioè 12 quinte ascendenti): infatti, partendo da un Do contrabbasso e procedendo per quinte, si giungerà a chiudere lo spazio esattamente dopo 7 ottave: poiché una quinta giusta = 7, allora 7x12 = 84, quante sono le divisioni dello spazio sonoro temperato.
Poiché ogni ottava è divisa dal tritono in due parti uguali (12:2 = 6), e le ottave sono 7, è evidente che lo spazio sonoro temperato è a sua volta diviso dal tritono in due parti uguali: poiché il tritono = 6, allora si avrà 84 : 2 = 42 e quindi 42 : 7 = 6.

Il numero delle parti uguali in cui può essere suddiviso un qualsiasi spazio temperato è dato dalla formula <i> = tn. L'adozione dei numeri interi permette di calcolare rapidamente gli intervalli, anche in ipotetici sistemi con un temperamento differente da 12, in quanto la formula generale è valida per ogni tipo di temperamento.

Esempio:
24 = 12x2 (spazio esteso su 2 ottave di temperamento 12)
84 = 14x6 (spazio esteso su 6 ottave di temperamento 14)
54 = 18x3 (spazio esteso su 3 ottave di temperamento 18).

Con il computer si possono simulare alcuni casi piuttosto interessanti. Supponiamo, per esempio, di concentrare lo spazio compreso fra le quattro ottave centrali Do1-Do5 (12x4 = 48) in una sola ottava divisa in 48 parti uguali, cioè in ottavi di tono (48x1 = 48); con un computer si potrà far risuonare un qualsiasi brano musicale classico, ad esempio una sinfonia di Mozart, all'interno di una sola ottava, con effetti sorprendenti**.**

Per ogni due classi di altezze a e b, la *classe di intervalli* (ic) fra a e b sarà uguale al minore dei due possibili intervalli fra a e b (mod 12). Ogni classe di intervalli mod 12 si potrà indicare così: ic (a,b) = al minore fra i (a,b) e i (b,a) mod 12.
Nel caso precedente avremo: ic = al minore fra –11 e 11, cioè = –11 (mod 12) = 1.
Es. 1.8



Concludendo: ogni paia di altezze <a,b> comprende un intervallo definito dalla ampiezza b–a, invariante sotto ogni uguale trasposizione di entrambi le altezze.
Poiché b–a = a–b (nel caso precedente –11+11 = 11–11) e quindi i–i = 0, si definiscono sei classi di intervalli, di cui cinque comprendenti due intervalli semplici inversi fra loro (1-11, 2-10, 3-9, 4-8, 5-7), e una classe comprendente un intervallo inverso di se stesso (6-6). La classe di intervalli 0-12 è equivalente all'unisono.
Procedendo dal generale al particolare, si possono riassumere 5 modi per designare l'intervallo mi♭^{3}-mi^{1}.

i <mi♭^{3}\mi^1>	–23 discendente composto
i <mi^1/mib^3>	23 ascendente composto
i (mi♭\,mi)	–11 discendente semplice
i (mi/mi♭)	11 ascendente semplice
ic (mi♭-mi) mod 12	1 classe di intervalli

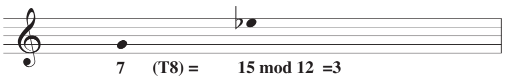
I.6. Trasposizione e inversione

Occorre ora definire due operazioni fondamentali: *trasposizione* e *inversione*.
La *trasposizione* (T) è una operazione che consiste nell'addizionare una costante n (cioè un numero di semitoni costante) ad una altezza data. Per ogni altezza x e ogni intervallo n sarà applicabile la formula Tn (x) = x+n.
La trasposizione per le classi di altezze è data da una formula simile, e cioè:
Tn (x) = x+n mod 12.

Esempio:
T8 (7) = 7+8 mod 12 = 15–12 = 3, ossia T8 (sol) = mi♭.

Il valore costituito dalla differenza fra la altezza trasposta e quella originaria costituisce l'*indice numerico di trasposizione* (Tn); nel caso precedente:
Tn = 15–7 = 8.

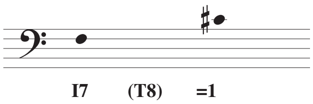
Es. 1.9



L'*inversione* (I) è un'operazione che consiste nel trasformare una altezza data nel suo corrispondente negativo e viceversa. Per ogni altezza x sarà applicabile la formula: Ix = –x.
Per calcolare l'*inversione trasposta* occorrerà addizionare una costante n all'inverso di una altezza data. Per ogni altezza x e ogni intervallo n sarà applicabile la formula TnI (x) = –x+n.
Nel caso si operi con classi di altezze, l'inversione risponderà ad una formula simile e cioè: TnI (x) = –x+n mod 12.

Esempio:
T8I (7) = –7+8 = 1, ossia T8 (fa) = do♯.

Es. 1.10



Il valore rappresentato dalla somma dell'altezza inversa trasposta e l'altezza originaria costituisce l'*indice numerico di inversione* (TnI); nel caso precedente TnI = 1+7 = 8. Se TnI = 0, allora una altezza sommata alla sua inversione sarà uguale a 0.
Il centro di simmetria fra due altezze *correlate per inversione* è la metà del loro indice TnI, cioè TnI/2; nel caso precedente avremo: T8I (7) = –7+8 = 1; il centro simmetria fra –7 e 1 sarà uguale a –8/2 = –4 (ciò significa che tra fa e do♯ il centro di simmetria è la).

Un'operazione composta è il prodotto di due o più altre operazioni.

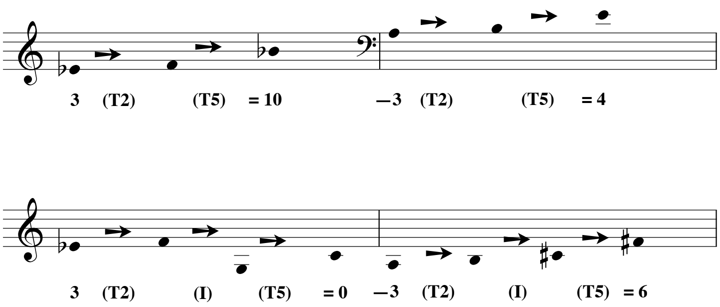
Esempio:

Tn	[Tm(x)]	=	(x+m)+n
Tn	[TmI(x)]	=	(–x+m)+n
TnI	[Tm(x)]	=	–(x+m)+n
TnI	[TmI(x)]	=	–(–x+m)+n

cioè

T5	[T2(3)]	=	(3+2)+5 = 10
T5	[T2I(3)]	=	(–3+2)+5 = 4
T5I	[T2(3)]	=	–(3+2)+5 = 0
T5I	[T2I(3)]	=	–(–3+2)+5 = 6

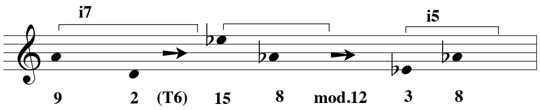
Es. 1.11



Ovviamente, come le singole altezze e le classi di altezze, anche gli intervalli possono essere trasportati. Il totale degli intervalli semplici, considerando le loro possibili trasposizioni, è uguale a (5x12) + (1x6) cioè a 66.

Un intervallo trasportato mantiene invariato il suo contorno melodico. Se il livello di trasposizione supera l'ottava, allora l'intervallo trasportato (mod 12) si trasforma nel suo *rivolto*; in questa prospettiva trasposizione e rivolto appaiono come equivalenti.

Esempio:
Poiché i (9,2) = 7 allora, T6 i (9,2) = (9+6)–(2+6) = 15 (mod 12)–8 = 3–8.
Quindi T6 i (9,2) mod 12 = i (3–8) = 5 (rivolto di 7).
È così che le varie operazioni di trasposizione e di inversione danno luogo a tutti gli intervalli ascendenti e discendenti.
Es. 1.12

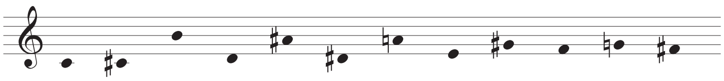


I.7. Rappresentazioni grafiche

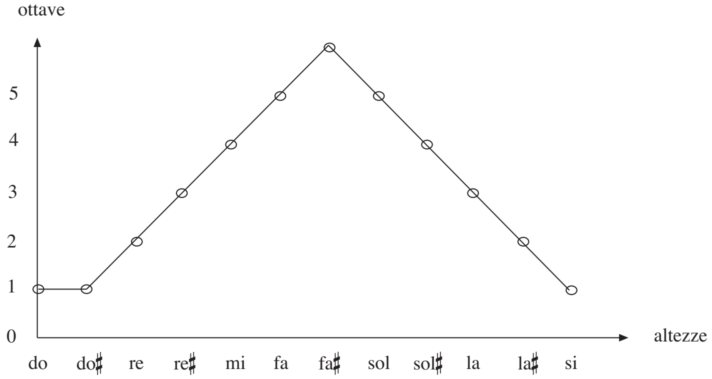
Tutte le altezze possono essere rappresentate come punti disposti ad intervalli regolari lungo una linea:

Do, Do♯, Re, Re♯, Mi, Fa, Fa♯, Sol, Sol♯, La, La♯, Si,
——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——.

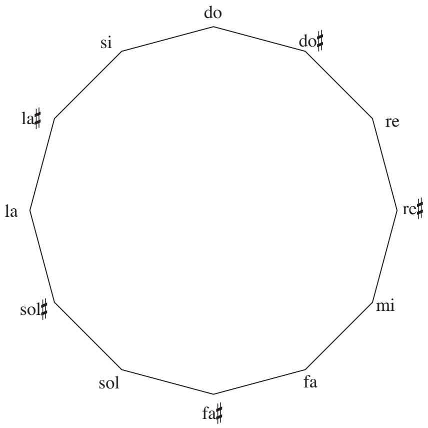
Assai più interessante appare la possibilità di rappresentare le varie altezze su due dimensioni, ove in ascissa siano le 12 classi di altezze e in ordinata le differenti ottave di appartenenza. Nell'esempio seguente viene rappresentata in questo modo la serie di tutti gli intervalli:
Es. 1.13



Es. 1.14

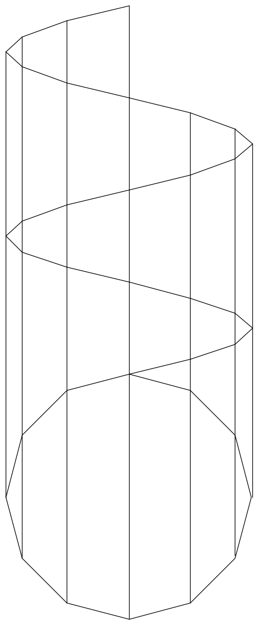


Lo schema precedente viene proposto da Eimert nel *Lehrbuch der Zwölftechnik,* adottando una notazione per numeri interi.[10] L'insieme delle 12 altezze può essere realizzato graficamente attraverso un dodecagono inscritto all'interno di un cerchio, i 12 vertici del quale corrispondano alle diverse classi di altezze. La rappresentazione grafica attraverso il dodecagono appare in Hauer, Simbriger, Gingerich e numerosi altri teorici.
Es. 1.15



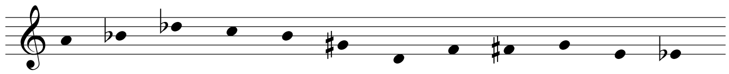
Per rappresentare compiutamente tutte le singole altezze, occorrerebbe ricorrere ad uno schema tridimensionale, precisamente a una spirale ad asse verticale, della quale il dodecagono sia una proiezione sul piano: la serie di tutte le altezze si definirà così dalla sintesi di due caratteristiche, una costante a percorso rettilineo, che procede secondo una proporzione aritmetica (quantità), e l'altra costante periodica, che procede secondo una proporzione geometrica (qualità) *(Teoria delle due componenti)*.[11]

Es. 1.16



Fra le varie altre possibilità di rappresentazione grafica, si noti infine quella che ricorre a un diagramma quadrato, del quale la scala cromatica rappresenta la diagonale.[12] Nell'esempio seguente viene rappresentata in questo modo una serie dodecafonica.

Es. 1.17



Es. 1.18